**2024年高考数学一卷**

学校:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_姓名：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_班级：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_考号：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**一、单选题**

1．已知集合，则（    ）

A． B． C． D．

2．若，则（    ）

A． B． C． D．

3．已知向量，若，则（    ）

A． B． C．1 D．2

4．已知，则（    ）

A． B． C． D．

5．已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为，则圆锥的体积为（    ）

A． B． C． D．

6．已知函数在**R**上单调递增，则*a*的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

7．当时，曲线与的交点个数为（    ）

A．3 B．4 C．6 D．8

8．已知函数的定义域为**R**，，且当时，则下列结论中一定正确的是（    ）

A． B．

C． D．

**二、多选题**

9．随着“一带一路”国际合作的深入，某茶叶种植区多措并举推动茶叶出口.为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值，样本方差，已知该种植区以往的亩收入服从正态分布，假设推动出口后的亩收入服从正态分布，则（    ）（若随机变量*Z*服从正态分布，）

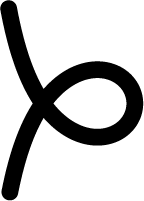
A． B．

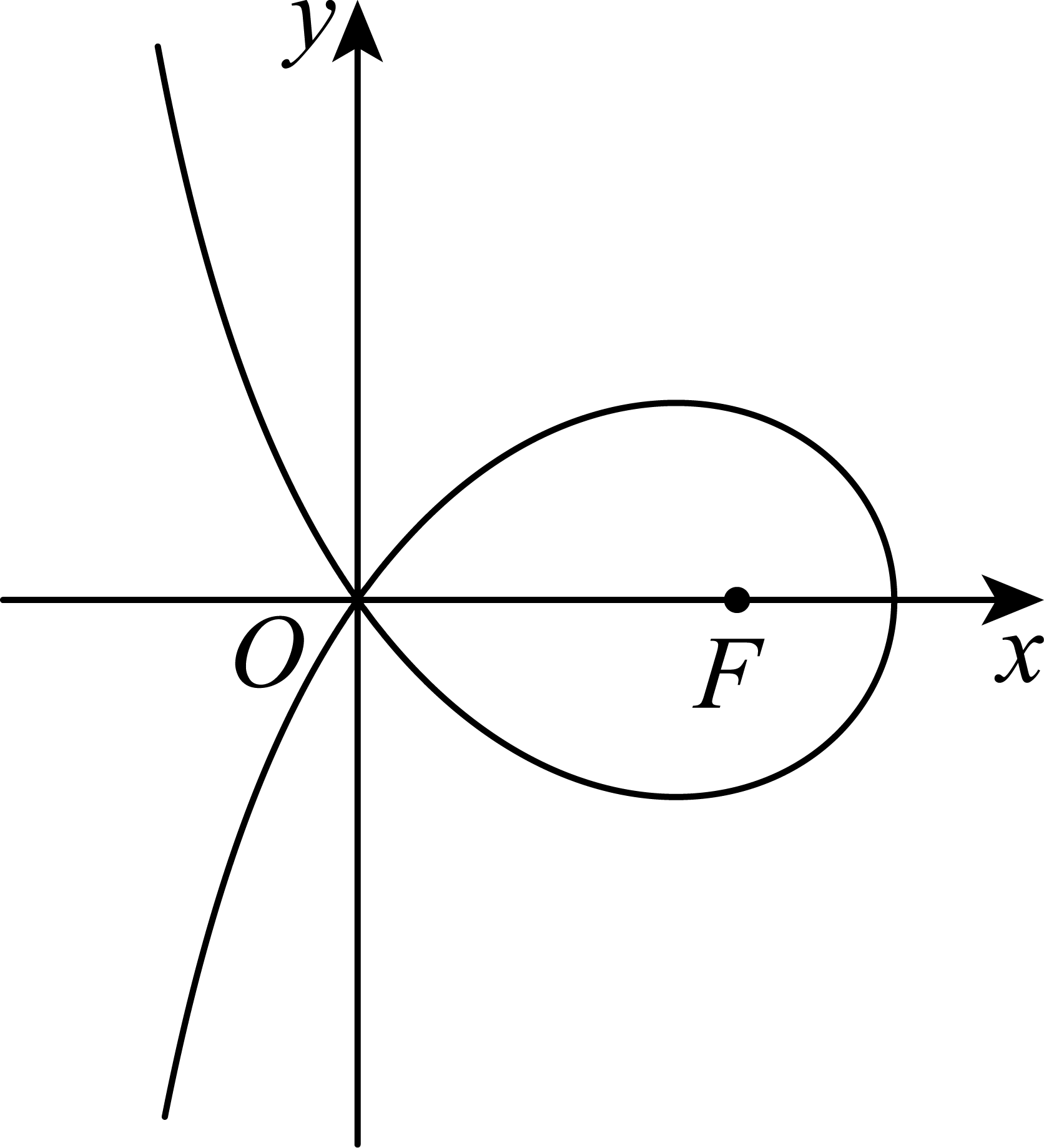
C． D．

10．设函数，则（    ）

A．是的极小值点 B．当时，

C．当时， D．当时，

11．设计一条美丽的丝带,其造型可以看作图中的曲线*C*的一部分.已知*C*过坐标原点*O*.且*C*上的点满足:横坐标大于，到点的距离与到定直线的距离之积为4，则（    ）



A． B．点在*C*上

C．*C*在第一象限的点的纵坐标的最大值为1 D．当点在*C*上时，

**三、填空题**

12．设双曲线的左右焦点分别为，过作平行于轴的直线交*C*于*A*，*B*两点，若，则*C*的离心率为 ．

13．若曲线在点处的切线也是曲线的切线，则 .

14．甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字2，4，6，8，两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上数字的大小，数字大的人得1分，数字小的人得0分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用）.则四轮比赛后，甲的总得分不小于2的概率为 .

**四、解答题**

15．记的内角*A*、*B*、*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，已知，

(1)求*B*；

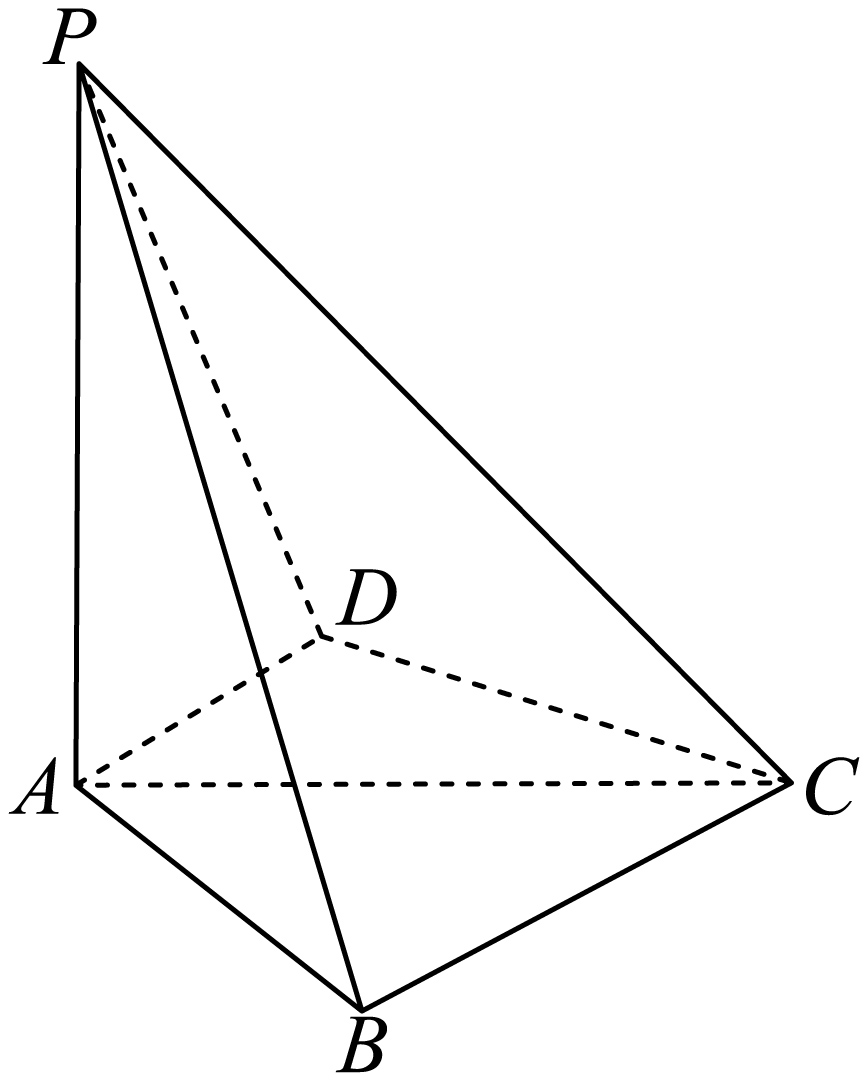
(2)若的面积为，求*c*．

16．已知和为椭圆上两点.

(1)求*C*的离心率;

(2)若过*P*的直线交*C*于另一点*B*，且的面积为9，求的方程．

17．如图，四棱锥中，底面*ABCD*，，．



(1)若，证明：平面；

(2)若，且二面角的正弦值为，求．

18．已知函数

(1)若，且，求的最小值；

(2)证明：曲线是中心对称图形；

(3)若当且仅当，求的取值范围．

19．设*m*为正整数，数列是公差不为0的等差数列，若从中删去两项和后剩余的项可被平均分为组，且每组的4个数都能构成等差数列，则称数列是可分数列．

(1)写出所有的，，使数列是可分数列；

(2)当时，证明：数列是可分数列；

(3)从中任取两个数和，记数列是可分数列的概率为，证明：．

**参考答案：**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **题号** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **答案** | A | C | D | A | B | B | C | B | BC | ACD |
| **题号** | 11 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **答案** | ABD |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

1．A

【分析】化简集合，由交集的概念即可得解.

【详解】因为，且注意到，

从而.

故选：A.

2．C

【分析】由复数四则运算法则直接运算即可求解.

【详解】因为，所以.

故选：C.

3．D

【分析】根据向量垂直的坐标运算可求的值.

【详解】因为，所以，

所以即，故，

故选：D.

4．A

【分析】根据两角和的余弦可求的关系，结合的值可求前者，故可求的值.

【详解】因为，所以，

而，所以，

故即，

从而，故，

故选：A.

5．B

【分析】设圆柱的底面半径为，根据圆锥和圆柱的侧面积相等可得半径的方程，求出解后可求圆锥的体积.

【详解】设圆柱的底面半径为，则圆锥的母线长为，

而它们的侧面积相等，所以即，

故，故圆锥的体积为.

故选：B.

6．B

【分析】根据二次函数的性质和分界点的大小关系即可得到不等式组，解出即可.

【详解】因为在上单调递增，且时，单调递增，

则需满足，解得，

即*a*的范围是.

故选：B.

7．C

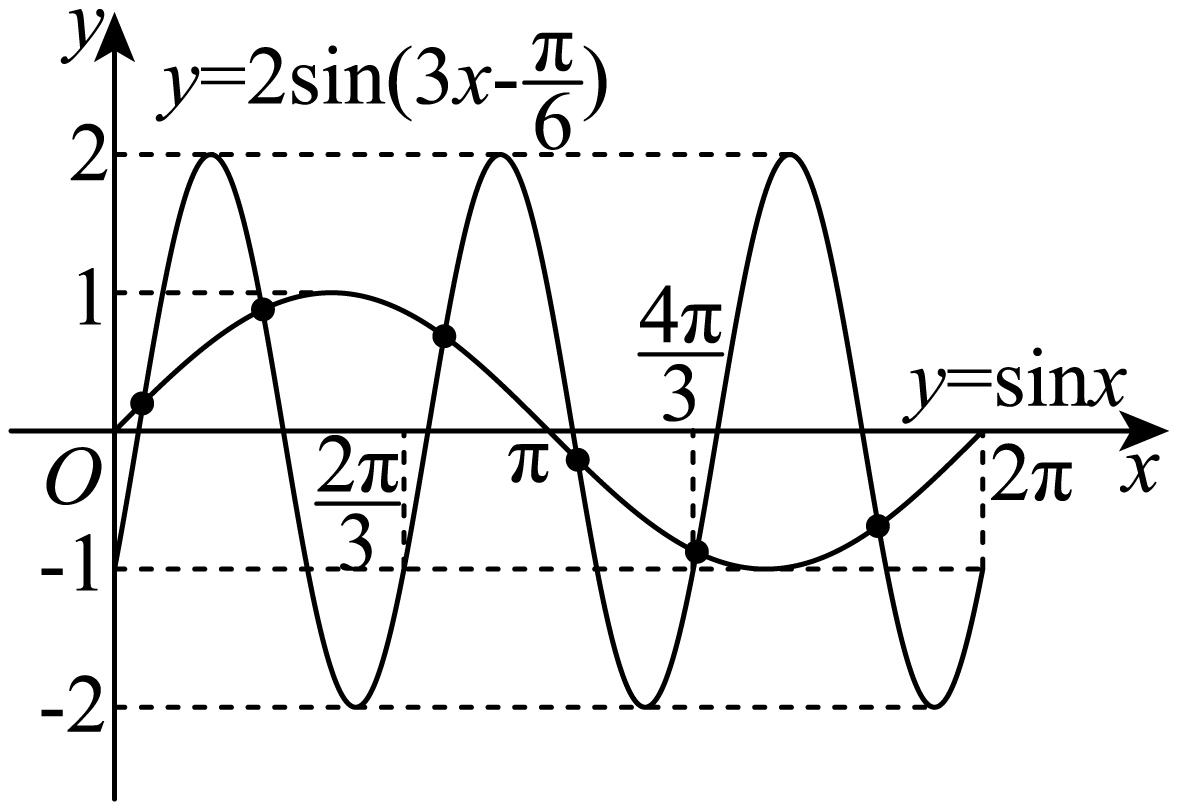
【分析】画出两函数在上的图象，根据图象即可求解

【详解】因为函数的的最小正周期为，

函数的最小正周期为，

所以在上函数有三个周期的图象，

在坐标系中结合五点法画出两函数图象，如图所示：



由图可知，两函数图象有6个交点.

故选：C

8．B

【分析】代入得到，再利用函数性质和不等式的性质，逐渐递推即可判断.

【详解】因为当时，所以，

又因为，

则，

，

，



，

，则依次下去可知，则B正确；

且无证据表明ACD一定正确.

故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题的关键是利用，再利用题目所给的函数性质，代入函数值再结合不等式同向可加性，不断递推即可.

9．BC

【分析】根据正态分布的原则以及正态分布的对称性即可解出.

【详解】依题可知，，所以，

故，C正确，D错误；

因为，所以，

因为，所以，

而，B正确，A错误，

故选：BC．

10．ACD

【分析】求出函数的导数，得到极值点，即可判断A；利用函数的单调性可判断B；根据函数在上的值域即可判断C；直接作差可判断D.

【详解】对A，因为函数的定义域为**R**，而，

易知当时，，当或时，

函数在上单调递增，在上单调递减，在上单调递增，故是函数的极小值点，正确；

对B，当时，，所以，

而由上可知，函数在上单调递增，所以，错误；

对C，当时，，而由上可知，函数在上单调递减，

所以，即，正确；

对D，当时，，

所以，正确；

故选：ACD.

11．ABD

【分析】根据题设将原点代入曲线方程后可求，故可判断A的正误，结合曲线方程可判断B的正误，利用特例法可判断C的正误，将曲线方程化简后结合不等式的性质可判断D的正误.

【详解】对于A：设曲线上的动点，则且，

因为曲线过坐标原点，故，解得，故A正确.

对于B：又曲线方程为，而，

故.

当时，，

故在曲线上，故B正确.

对于C：由曲线的方程可得，取，

则，而，故此时，

故在第一象限内点的纵坐标的最大值大于1，故C错误.

对于D：当点在曲线上时，由C的分析可得，

故，故D正确.

故选：ABD.

【点睛】思路点睛：根据曲线方程讨论曲线的性质，一般需要将曲线方程变形化简后结合不等式的性质等来处理.

12．

【分析】由题意画出双曲线大致图象，求出，结合双曲线第一定义求出，即可得到的值，从而求出离心率.

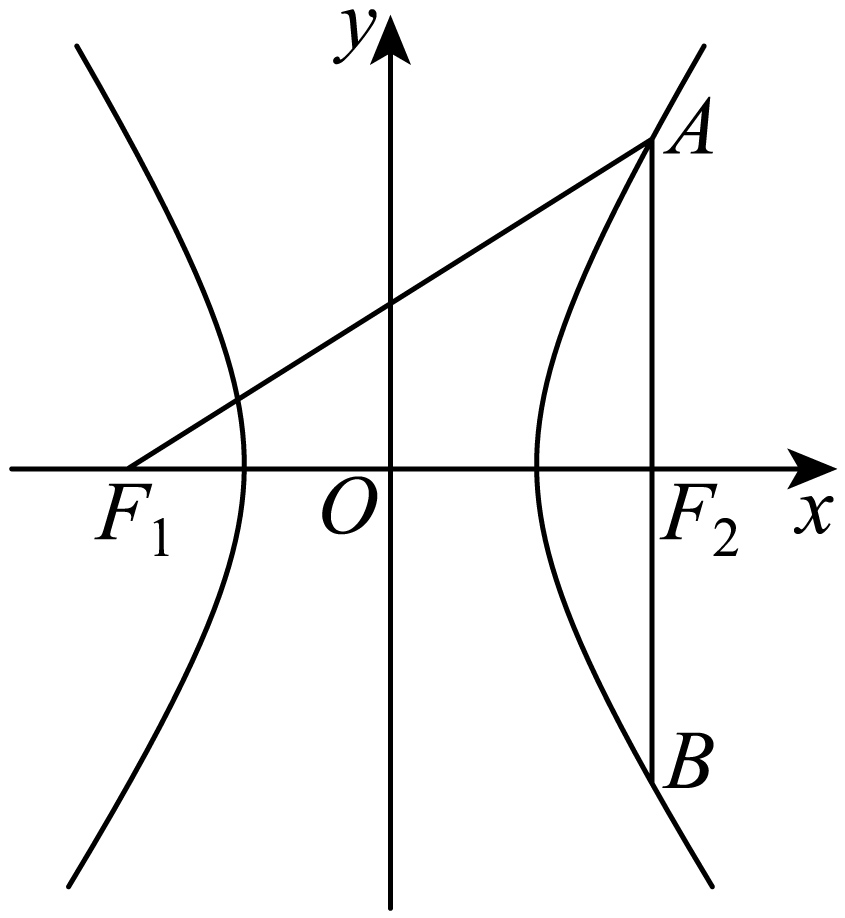
【详解】由题可知三点横坐标相等，设在第一象限，将代入

得，即，故，，

又，得，解得，代入得，

故，即，所以.

故答案为：



13．

【分析】先求出曲线在的切线方程，再设曲线的切点为，求出，利用公切线斜率相等求出，表示出切线方程，结合两切线方程相同即可求解.

【详解】由得，，

故曲线在处的切线方程为；

由得，

设切线与曲线相切的切点为，

由两曲线有公切线得，解得，则切点为，

切线方程为，

根据两切线重合,所以，解得.

故答案为：

14．/0.5

【分析】将每局的得分分别作为随机变量，然后分析其和随机变量即可.

【详解】设甲在四轮游戏中的得分分别为，四轮的总得分为.

对于任意一轮，甲乙两人在该轮出示每张牌的概率都均等，其中使得甲得分的出牌组合有六种，从而甲在该轮得分的概率，所以.

从而.

记.

如果甲得0分，则组合方式是唯一的：必定是甲出1，3，5，7分别对应乙出2，4，6，8，所以；

如果甲得3分，则组合方式也是唯一的：必定是甲出1，3，5，7分别对应乙出8，2，4，6，所以.

而的所有可能取值是0，1，2，3，故，.

所以，，两式相减即得，故.

所以甲的总得分不小于2的概率为.

故答案为：.

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于将问题转化为随机变量问题，利用期望的可加性得到等量关系，从而避免繁琐的列举.

15．(1)

(2)

【分析】（1）由余弦定理、平方关系依次求出，最后结合已知得的值即可；

（2）首先求出，然后由正弦定理可将均用含有的式子表示，结合三角形面积公式即可列方程求解.

【详解】（1）由余弦定理有，对比已知，

可得，

因为，所以，

从而，

又因为，即，

注意到，

所以.

（2）由（1）可得，，，从而，，

而，

由正弦定理有，

从而，

由三角形面积公式可知，的面积可表示为

，

由已知的面积为，可得，

所以.

16．(1)

(2)直线的方程为或.

【分析】（1）代入两点得到关于的方程，解出即可；

（2）方法一：以为底，求出三角形的高，即点到直线的距离，再利用平行线距离公式得到平移后的直线方程，联立椭圆方程得到点坐标，则得到直线的方程；方法二：同法一得到点到直线的距离，再设，根据点到直线距离和点在椭圆上得到方程组，解出即可；法三：同法一得到点到直线的距离，利用椭圆的参数方程即可求解；法四：首先验证直线斜率不存在的情况，再设直线，联立椭圆方程，得到点坐标，再利用点到直线距离公式即可；法五：首先考虑直线斜率不存在的情况，再设，利用弦长公式和点到直线的距离公式即可得到答案；法六：设线法与法五一致，利用水平宽乘铅锤高乘表达面积即可.

【详解】（1）由题意得，解得，

所以.

（2）法一：，则直线的方程为，即，

，由（1）知，

设点到直线的距离为，则，

则将直线沿着与垂直的方向平移单位即可，

此时该平行线与椭圆的交点即为点，

设该平行线的方程为：，

则，解得或，

当时，联立，解得或，

即或，

当时，此时，直线的方程为，即，

当时，此时，直线的方程为，即，

当时，联立得，

，此时该直线与椭圆无交点.

综上直线的方程为或.

法二：同法一得到直线的方程为，

点到直线的距离，

设，则，解得或，

即或，以下同法一.

法三：同法一得到直线的方程为，

点到直线的距离，

设，其中，则有，

联立，解得或，

即或，以下同法一；

法四：当直线的斜率不存在时，此时，

，符合题意，此时，直线的方程为，即，

当线的斜率存在时，设直线的方程为，

联立椭圆方程有，则，其中，即，

解得或，，，

令，则，则

同法一得到直线的方程为，

点到直线的距离，

则，解得，

此时，则得到此时，直线的方程为，即，

综上直线的方程为或.

法五：当的斜率不存在时，到距离，

此时不满足条件.

当的斜率存在时，设，令，

，消可得，

，且，即，

，

到直线距离，

或，均满足题意，或，即或.

法六：当的斜率不存在时，到距离，

此时不满足条件.

当直线斜率存在时，设，

设与轴的交点为，令，则，

联立，则有，

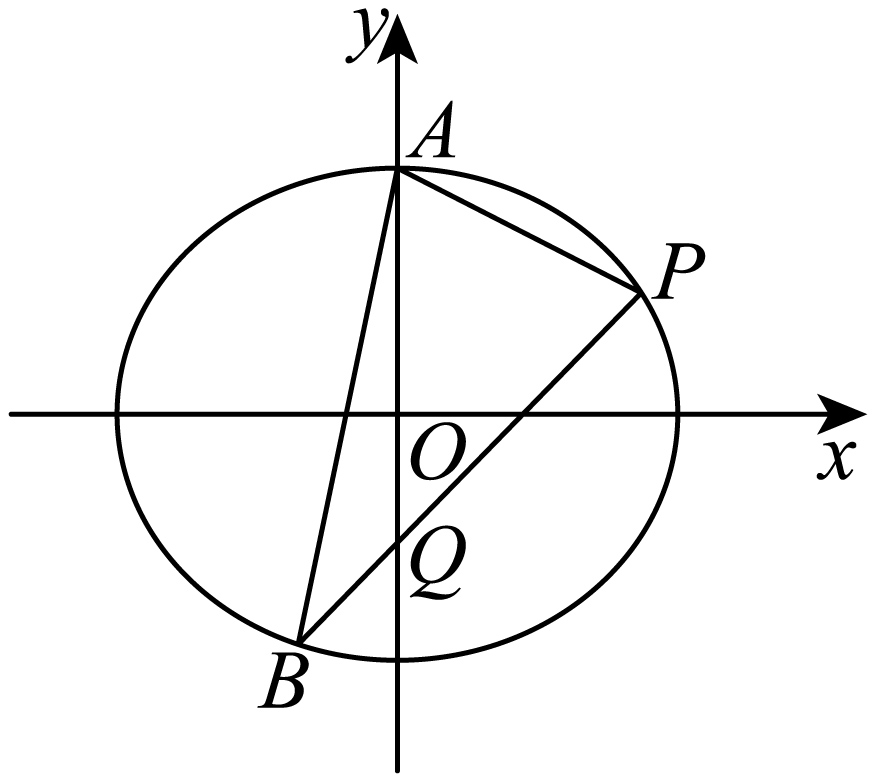
，

其中，且，

则，

则，解的或，经代入判别式验证均满足题意.

则直线为或，即或.



17．(1)证明见解析

(2)

【分析】（1）先证出平面，即可得，由勾股定理逆定理可得，从而 ，再根据线面平行的判定定理即可证出；

（2）过点*D*作于，再过点作于，连接，根据三垂线法可知，即为二面角的平面角，即可求得，再分别用的长度表示出，即可解方程求出．

【详解】（1）（1）因为平面，而平面，所以，

又，，平面，所以平面，

而平面，所以.

因为，所以， 根据平面知识可知，

又平面，平面，所以平面．

（2）如图所示，过点*D*作于，再过点作于，连接，

因为平面，所以平面平面，而平面平面，

所以平面，又，所以平面，

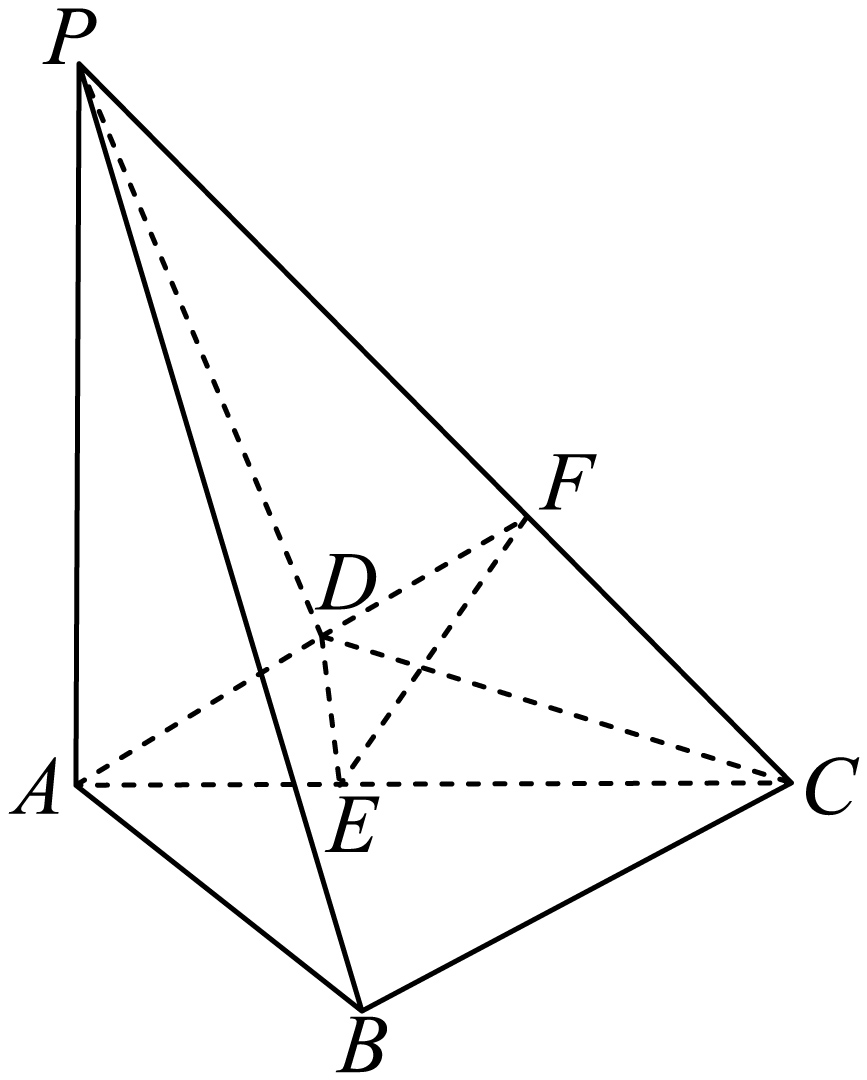
根据二面角的定义可知，即为二面角的平面角，

即，即．

因为，设，则，由等面积法可得，，

又，而为等腰直角三角形，所以，

故，解得，即．



18．(1)

(2)证明见解析

(3)

【分析】（1）求出后根据可求的最小值；

（2）设为图象上任意一点，可证关于的对称点为也在函数的图像上，从而可证对称性；

（3）根据题设可判断即，再根据在上恒成立可求得.

【详解】（1）时，，其中，

则，

因为，当且仅当时等号成立，

故，而成立，故即，

所以的最小值为.，

（2）的定义域为，

设为图象上任意一点，

关于的对称点为，

因为在图象上，故，

而，

，

所以也在图象上，

由的任意性可得图象为中心对称图形，且对称中心为.

（3）因为当且仅当，故为的一个解，

所以即，

先考虑时，恒成立.

此时即为在上恒成立，

设，则在上恒成立，

设，

则，

当，，

故恒成立，故在上为增函数，

故即在上恒成立.

当时，，

故恒成立，故在上为增函数，

故即在上恒成立.

当，则当时，

故在上为减函数，故，不合题意，舍；

综上，在上恒成立时.

而当时，

而时，由上述过程可得在递增，故的解为，

即的解为.

综上，.

【点睛】思路点睛：一个函数不等式成立的充分必要条件就是函数不等式对应的解，而解的端点为函数对一个方程的根或定义域的端点，另外，根据函数不等式的解确定参数范围时，可先由恒成立得到参数的范围，再根据得到的参数的范围重新考虑不等式的解的情况.

19．(1)

(2)证明见解析

(3)证明见解析

【分析】（1）直接根据可分数列的定义即可；

（2）根据可分数列的定义即可验证结论；

（3）证明使得原数列是可分数列的至少有个，再使用概率的定义.

【详解】（1）首先，我们设数列的公差为，则.

由于一个数列同时加上一个数或者乘以一个非零数后是等差数列，当且仅当该数列是等差数列，

故我们可以对该数列进行适当的变形，

得到新数列，然后对进行相应的讨论即可.

换言之，我们可以不妨设，此后的讨论均建立在该假设下进行.

回到原题，第1小问相当于从中取出两个数和，使得剩下四个数是等差数列.

那么剩下四个数只可能是，或，或.

所以所有可能的就是.

（2）由于从数列中取出和后，剩余的个数可以分为以下两个部分，共组，使得每组成等差数列：

①，共组；

②，共组.

（如果，则忽略②）

故数列是可分数列.

（3）定义集合，.

下面证明，对，如果下面两个命题同时成立，

则数列一定是可分数列：

命题1：或；

命题2：.

我们分两种情况证明这个结论.

第一种情况：如果，且.

此时设，，.

则由可知，即，故.

此时，由于从数列中取出和后，

剩余的个数可以分为以下三个部分，共组，使得每组成等差数列：

①，共组；

②，共组；

③，共组.

（如果某一部分的组数为，则忽略之）

故此时数列是可分数列.

第二种情况：如果，且.

此时设，，.

则由可知，即，故.

由于，故，从而，这就意味着.

此时，由于从数列中取出和后，剩余的个数可以分为以下四个部分，共组，使得每组成等差数列：

①，共组；

②，，共组；

③全体，其中，共组；

④，共组.

（如果某一部分的组数为，则忽略之）

这里对②和③进行一下解释：将③中的每一组作为一个横排，排成一个包含个行，个列的数表以后，个列分别是下面这些数：

，，，.

可以看出每列都是连续的若干个整数，它们再取并以后，将取遍中除开五个集合，，，，中的十个元素以外的所有数.

而这十个数中，除开已经去掉的和以外，剩余的八个数恰好就是②中出现的八个数.

这就说明我们给出的分组方式满足要求，故此时数列是可分数列.

至此，我们证明了：对，如果前述命题1和命题2同时成立，则数列一定是可分数列.

然后我们来考虑这样的的个数.

首先，由于，和各有个元素，故满足命题1的总共有个；

而如果，假设，则可设，，代入得.

但这导致，矛盾，所以.

设，，，则，即.

所以可能的恰好就是，对应的分别是，总共个.

所以这个满足命题1的中，不满足命题2的恰好有个.

这就得到同时满足命题1和命题2的的个数为.

当我们从中一次任取两个数和时，总的选取方式的个数等于.

而根据之前的结论，使得数列是可分数列的至少有个.

所以数列是可分数列的概率一定满足

.

这就证明了结论.

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于对新定义数列的理解，只有理解了定义，方可使用定义验证或探究结论.