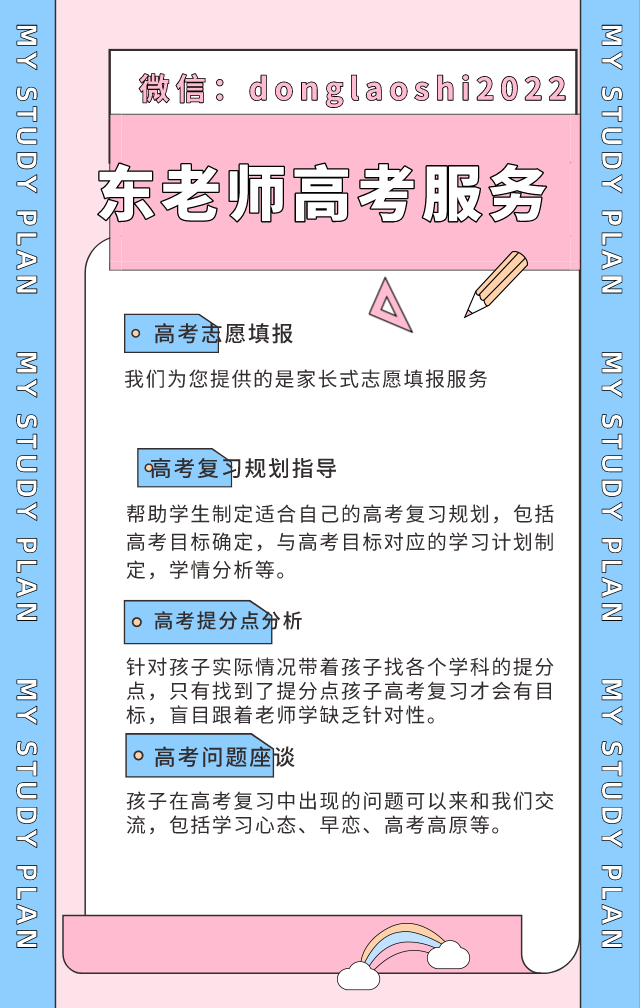
**2021年全国新高考I卷数学试题**

****

学校:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_姓名：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_班级：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_考号：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**一、单选题**

1．设集合，，则（       ）

A． B． C． D．

2．已知，则（       ）

A． B． C． D．

3．已知圆锥的底面半径为，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为（       ）

A． B． C． D．

4．下列区间中，函数单调递增的区间是（       ）

A． B． C． D．

5．已知，是椭圆：的两个焦点，点在上，则的最大值为（       ）

A．13 B．12 C．9 D．6

6．若，则（       ）

A． B． C． D．

7．若过点可以作曲线的两条切线，则（       ）

A． B．

C． D．

8．有6个相同的球，分别标有数字1，2，3，4，5，6，从中有放回的随机取两次，每次取1个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是7”，则（       ）

A．甲与丙相互独立 B．甲与丁相互独立

C．乙与丙相互独立 D．丙与丁相互独立

**二、多选题**

9．有一组样本数据，，…，，由这组数据得到新样本数据，，…，，其中(为非零常数，则（       ）

A．两组样本数据的样本平均数相同

B．两组样本数据的样本中位数相同

C．两组样本数据的样本标准差相同

D．两组样本数据的样本极差相同

10．已知为坐标原点，点，，，，则（       ）

A． B．

C． D．

11．已知点在圆上，点、，则（       ）

A．点到直线的距离小于

B．点到直线的距离大于

C．当最小时，

D．当最大时，

12．在正三棱柱中，，点满足，其中，，则（       ）

A．当时，的周长为定值

B．当时，三棱锥的体积为定值

C．当时，有且仅有一个点，使得

D．当时，有且仅有一个点，使得平面

**三、填空题**

13．已知函数是偶函数，则\_\_\_\_\_\_.

14．已知为坐标原点，抛物线：()的焦点为，为上一点，与轴垂直，为轴上一点，且，若，则的准线方程为\_\_\_\_\_\_.

15．函数的最小值为\_\_\_\_\_\_.

**四、双空题**

16．某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折，规格为的长方形纸，对折1次共可以得到，两种规格的图形，它们的面积之和，对折2次共可以得到，，三种规格的图形，它们的面积之和，以此类推，则对折4次共可以得到不同规格图形的种数为\_\_\_\_\_\_；如果对折次，那么\_\_\_\_\_\_.

**五、解答题**

17．已知数列满足，

（1）记，写出，，并求数列的通项公式；

（2）求的前20项和.

18．某学校组织“一带一路”知识竞赛，有*A*，*B*两类问题，每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束.*A*类问题中的每个问题回答正确得20分，否则得0分；*B*类问题中的每个问题回答正确得80分，否则得0分，已知小明能正确回答*A*类问题的概率为0.8，能正确回答*B*类问题的概率为0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

（1）若小明先回答*A*类问题，记为小明的累计得分，求的分布列；

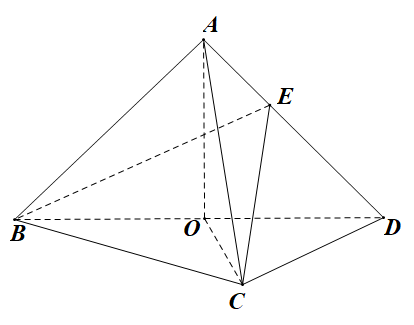
（2）为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

19．记是内角，，的对边分别为，，.已知，点在边上，.

（1）证明：；

（2）若，求.

20．如图，在三棱锥中，平面平面，，为的中点.



（1）证明：；

（2）若是边长为1的等边三角形，点在棱上，，且二面角的大小为，求三棱锥的体积.

21．在平面直角坐标系中，已知点、，点的轨迹为.

（1）求的方程；

（2）设点在直线上，过的两条直线分别交于、两点和，两点，且，求直线的斜率与直线的斜率之和.

22．已知函数.

（1）讨论的单调性；

（2）设，为两个不相等的正数，且，证明：.

**参考答案：**

1．B

【解析】

【分析】

利用交集的定义可求.

【详解】

由题设有，

故选：B .

2．C

【解析】

【分析】

利用复数的乘法和共轭复数的定义可求得结果.

【详解】

因为，故，故

故选：C.

3．B

【解析】

【分析】

设圆锥的母线长为，根据圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长可求得的值，即为所求.

【详解】

设圆锥的母线长为，由于圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长，则，解得.

故选：B.

4．A

【解析】

【分析】

解不等式，利用赋值法可得出结论.

【详解】

因为函数的单调递增区间为，

对于函数，由，

解得，

取，可得函数的一个单调递增区间为，

则，，A选项满足条件，B不满足条件；

取，可得函数的一个单调递增区间为，

且，，CD选项均不满足条件.

故选：A.

【点睛】

方法点睛：求较为复杂的三角函数的单调区间时，首先化简成形式，再求的单调区间，只需把看作一个整体代入的相应单调区间内即可，注意要先把化为正数．

5．C

【解析】

【分析】

本题通过利用椭圆定义得到，借助基本不等式即可得到答案．

【详解】

由题，，则，

所以（当且仅当时，等号成立）．

故选：C．

【点睛】

6．C

【解析】

【分析】

将式子先利用二倍角公式和平方关系配方化简，然后增添分母()，进行齐次化处理，化为正切的表达式，代入即可得到结果．

【详解】

将式子进行齐次化处理得：



．

故选：C．

【点睛】

易错点睛：本题如果利用，求出的值，可能还需要分象限讨论其正负，通过齐次化处理，可以避开了这一讨论．

7．D

【解析】

【分析】

解法一：根据导数几何意义求得切线方程，再构造函数，利用导数研究函数图象，结合图形确定结果；

解法二：画出曲线的图象，根据直观即可判定点在曲线下方和轴上方时才可以作出两条切线.

【详解】

在曲线上任取一点，对函数求导得，

所以，曲线在点处的切线方程为，即，

由题意可知，点在直线上，可得，

令，则.

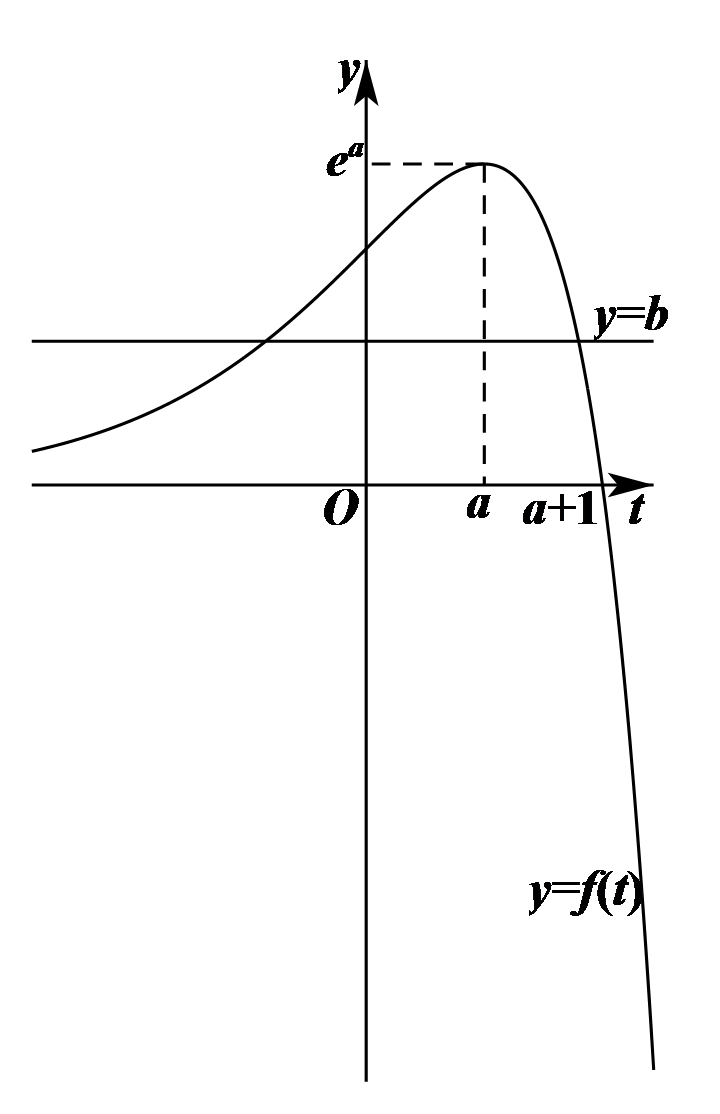
当时，，此时函数单调递增，

当时，，此时函数单调递减，

所以，，

由题意可知，直线与曲线的图象有两个交点，则，

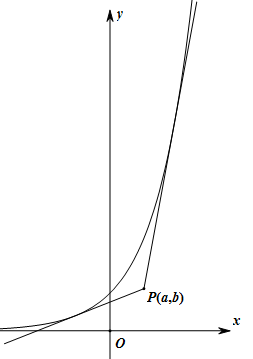
当时，，当时，，作出函数的图象如下图所示：



由图可知，当时，直线与曲线的图象有两个交点.

故选：D.

解法二：画出函数曲线的图象如图所示，根据直观即可判定点在曲线下方和轴上方时才可以作出两条切线.由此可知.



故选：D.

【点睛】

解法一是严格的证明求解方法，其中的极限处理在中学知识范围内需要用到指数函数的增长特性进行估计，解法二是根据基于对指数函数的图象的清晰的理解与认识的基础上，直观解决问题的有效方法.

8．B

【解析】

【分析】

根据独立事件概率关系逐一判断

【详解】

 ，





故选：B

【点睛】

判断事件是否独立，先计算对应概率，再判断是否成立

9．CD

【解析】

【分析】

A、C利用两组数据的线性关系有、，即可判断正误；根据中位数、极差的定义，结合已知线性关系可判断B、D的正误.

【详解】

A：且，故平均数不相同，错误；

B：若第一组中位数为，则第二组的中位数为，显然不相同，错误；

C：，故方差相同，正确；

D：由极差的定义知：若第一组的极差为，则第二组的极差为，故极差相同，正确；

故选：CD

10．AC

【解析】

【分析】

A、B写出，、，的坐标，利用坐标公式求模，即可判断正误；C、D根据向量的坐标，应用向量数量积的坐标表示及两角和差公式化简，即可判断正误.

【详解】

A：，，所以，，故，正确；

B：，，所以，同理，故不一定相等，错误；

C：由题意得：，，正确；

D：由题意得：，

，故一般来说**故错误；**

故选：AC

11．ACD

【解析】

【分析】

计算出圆心到直线的距离，可得出点到直线的距离的取值范围，可判断AB选项的正误；分析可知，当最大或最小时，与圆相切，利用勾股定理可判断CD选项的正误.

【详解】

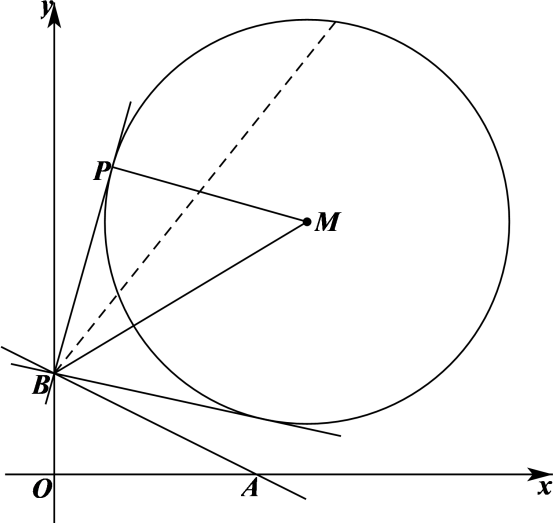
圆的圆心为，半径为，

直线的方程为，即，

圆心到直线的距离为，

所以，点到直线的距离的最小值为，最大值为，A选项正确，B选项错误；

如下图所示：



当最大或最小时，与圆相切，连接、，可知，

，，由勾股定理可得，CD选项正确.

故选：ACD.

【点睛】

结论点睛：若直线与半径为的圆相离，圆心到直线的距离为，则圆上一点到直线的距离的取值范围是.

12．BD

【解析】

【分析】

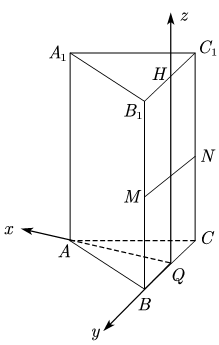
对于A，由于等价向量关系，联系到一个三角形内，进而确定点的坐标；

对于B，将点的运动轨迹考虑到一个三角形内，确定路线，进而考虑体积是否为定值；

对于C，考虑借助向量的平移将点轨迹确定，进而考虑建立合适的直角坐标系来求解点的个数；

对于D，考虑借助向量的平移将点轨迹确定，进而考虑建立合适的直角坐标系来求解点的个数．

【详解】



易知，点在矩形内部（含边界）．

对于A，当时，，即此时线段，周长不是定值，故A错误；

对于B，当时，，故此时点轨迹为线段，而，平面，则有到平面的距离为定值，所以其体积为定值，故B正确．

对于C，当时，，取，中点分别为，，则，所以点轨迹为线段，不妨建系解决，建立空间直角坐标系如图，，，，则，，，所以或．故均满足，故C错误；

对于D，当时，，取，中点为．，所以点轨迹为线段．设，因为，所以，，所以，此时与重合，故D正确．

故选：BD．

【点睛】

本题主要考查向量的等价替换，关键之处在于所求点的坐标放在三角形内．

13．1

【解析】

【分析】

利用偶函数的定义可求参数的值.

【详解】

因为，故，

因为为偶函数，故，

时，整理得到，

故，

故答案为：1

14．

【解析】

【分析】

先用坐标表示，再根据向量垂直坐标表示列方程，解得，即得结果.

【详解】

抛物线**：** **(****)**的焦点,

∵*P*为上一点，与轴垂直，

所以*P*的横坐标为，代入抛物线方程求得*P*的纵坐标为,

不妨设,

因为*Q*为轴上一点，且，所以*Q*在*F*的右侧，

又，



因为，所以,

，

所以的准线方程为

故答案为：.

【点睛】

利用向量数量积处理垂直关系是本题关键.

15．1

【解析】

【分析】

由解析式知定义域为，讨论、、，并结合导数研究的单调性，即可求最小值.

【详解】

由题设知：定义域为，

∴当时，，此时单调递减；

当时，，有，此时单调递减；

当时，，有，此时单调递增；

又在各分段的界点处连续，

∴综上有：时，单调递减，时，单调递增；

∴

故答案为：1.

16．     5     

【解析】

【分析】

（1）按对折列举即可；（2）根据规律可得，再根据错位相减法得结果.

【详解】

（1）由对折2次共可以得到，，三种规格的图形，所以对着三次的结果有：，共4种不同规格（单位；

故对折4次可得到如下规格：，，，，，共5种不同规格；

（2）由于每次对着后的图形的面积都减小为原来的一半，故各次对着后的图形，不论规格如何，其面积成公比为的等比数列，首项为120,第*n*次对折后的图形面积为，对于第n此对折后的图形的规格形状种数，根据（1）的过程和结论，猜想为种（证明从略），故得猜想，

设，

则，

两式作差得：





，

因此，.

故答案为：；.

【点睛】

方法点睛：数列求和的常用方法：

（1）对于等差等比数列，利用公式法可直接求解；

（2）对于结构，其中是等差数列，是等比数列，用错位相减法求和；

（3）对于结构，利用分组求和法；

（4）对于结构，其中是等差数列，公差为，则，利用裂项相消法求和.

17．（1）；（2）.

【解析】

【分析】

(1)方法一：由题意结合递推关系式确定数列的特征，然后求和其通项公式即可；

(2)方法二：分组求和，结合等差数列前项和公式即可求得数列的前20项和.

【详解】

解：（1）**[方法一]【最优解】：**

显然为偶数，则，

所以，即，且，

所以是以2为首项，3为公差的等差数列，

于是．

**[方法二]：奇偶分类讨论**

由题意知，所以．

由（为奇数）及（为偶数）可知，

数列从第一项起，

若为奇数，则其后一项减去该项的差为1，

若为偶数，则其后一项减去该项的差为2．

所以，则．

**[方法三]：累加法**

由题意知数列满足．

所以，

，

则．

所以，数列的通项公式．

（2）**[方法一]：奇偶分类讨论**





．

**[方法二]：分组求和**

由题意知数列满足，

所以．

所以数列的奇数项是以1为首项，3为公差的等差数列；

同理，由知数列的偶数项是以2为首项，3为公差的等差数列．

从而数列的前20项和为：

．

【整体点评】

(1)方法一：由题意讨论的性质为最一般的思路和最优的解法；

方法二：利用递推关系式分类讨论奇偶两种情况，然后利用递推关系式确定数列的性质；

方法三：写出数列的通项公式，然后累加求数列的通项公式，是一种更加灵活的思路.

(2)方法一：由通项公式分奇偶的情况求解前项和是一种常规的方法；

方法二：分组求和是常见的数列求和的一种方法，结合等差数列前项和公式和分组的方法进行求和是一种不错的选择.

18．（1）见解析；（2）类．

【解析】

【分析】

（1）通过题意分析出小明累计得分的所有可能取值，逐一求概率列分布列即可．（2）与（1）类似，找出先回答类问题的数学期望，比较两个期望的大小即可．

【详解】

（1）由题可知，的所有可能取值为，，．

；

；

．

所以的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

（2）由（1）知，．

若小明先回答问题，记为小明的累计得分，则的所有可能取值为，，．

；

；

．

所以．

因为，所以小明应选择先回答类问题．

19．（1）证明见解析；（2）.

【解析】

【分析】

（1）根据正弦定理的边角关系有，结合已知即可证结论.

（2）方法一：两次应用余弦定理，求得边与的关系，然后利用余弦定理即可求得的值.

【详解】

（1）设的外接圆半径为*R*，由正弦定理，

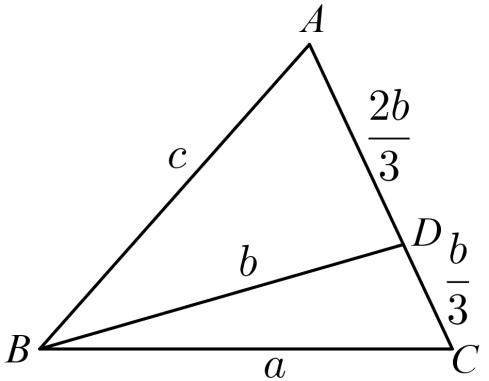
得，

因为，所以，即．

又因为，所以．

（2）**[方法一]【最优解】：两次应用余弦定理**

因为，如图，在中，，①



在中，．②

由①②得，整理得．

又因为，所以，解得或，

当时，（舍去）．

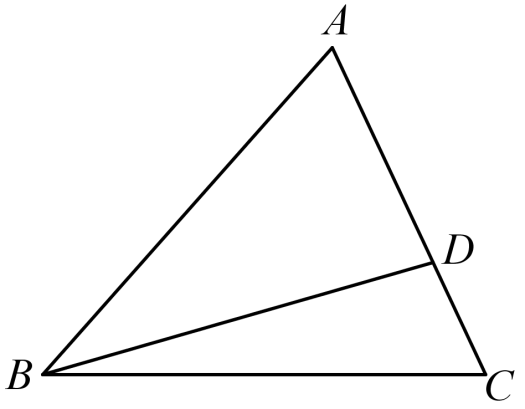
当时，．

所以．

**[方法二]：等面积法和三角形相似**

如图，已知，则，

即，



而，即，

故有，从而．

由，即，即，即，

故，即，

又，所以，

则．

**[方法三]：正弦定理、余弦定理相结合**

由（1）知，再由得．

在中，由正弦定理得．

又，所以，化简得．

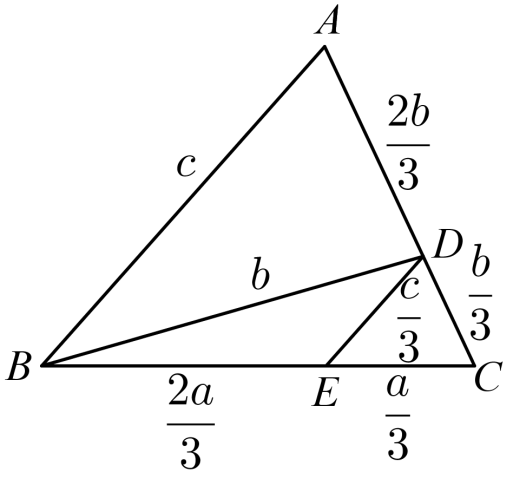
在中，由正弦定理知，又由，所以．

在中，由余弦定理，得．

故．

**[方法四]：构造辅助线利用相似的性质**

如图，作，交于点*E*，则．



由，得．

在中，．

在中．

因为，

所以，

整理得．

又因为，所以，

即或．

下同解法1．

**[方法五]：平面向量基本定理**

因为，所以．

以向量为基底，有．

所以，

即，

又因为，所以．③

由余弦定理得，

所以④

联立③④，得．

所以或．

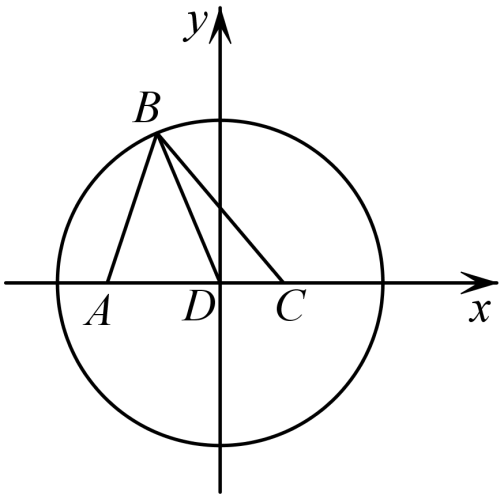
下同解法1．

**[方法六]：建系求解**

以*D*为坐标原点，所在直线为*x*轴，过点*D*垂直于的直线为*y*轴，

长为单位长度建立直角坐标系，

如图所示，则．



由（1）知，，所以点*B*在以*D*为圆心，3为半径的圆上运动．

设，则．⑤

由知，，

即．⑥

联立⑤⑥解得或（舍去），，

代入⑥式得，

由余弦定理得．

【整体点评】

(2)方法一：两次应用余弦定理是一种典型的方法，充分利用了三角形的性质和正余弦定理的性质解题；

方法二：等面积法是一种常用的方法，很多数学问题利用等面积法使得问题转化为更为简单的问题，相似是三角形中的常用思路；

方法三：正弦定理和余弦定理相结合是解三角形问题的常用思路；

方法四：构造辅助线作出相似三角形，结合余弦定理和相似三角形是一种确定边长比例关系的不错选择；

方法五：平面向量是解决几何问题的一种重要方法，充分利用平面向量基本定理和向量的运算法则可以将其与余弦定理充分结合到一起；

方法六：建立平面直角坐标系是解析几何的思路，利用此方法数形结合充分挖掘几何性质使得问题更加直观化.

20．(1)证明见解析；(2).

【解析】

【分析】

(1)由题意首先证得线面垂直，然后利用线面垂直的定义证明线线垂直即可；

(2)方法二：利用几何关系找到二面角的平面角，然后结合相关的几何特征计算三棱锥的体积即可.

【详解】

（1）因为，*O*是中点，所以，

因为平面，平面平面，

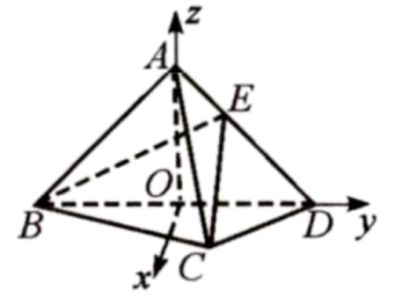
且平面平面，所以平面．

因为平面，所以.

（2）**[方法一]：通性通法—坐标法**

如图所示，以*O*为坐标原点，为轴，为*y*轴，垂直且过*O*的直线为*x*轴，建立空间直角坐标系，

则，设,



所以，

设为平面的法向量，

则由可求得平面的一个法向量为．

又平面的一个法向量为，

所以，解得．

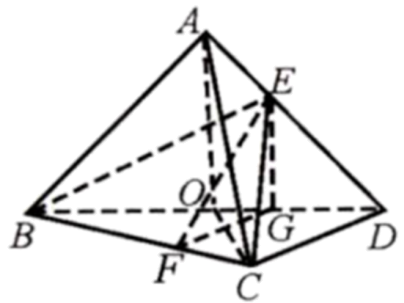
又点*C*到平面的距离为，所以，

所以三棱锥的体积为．

**[方法二]【最优解】：作出二面角的平面角**

如图所示，作，垂足为点*G*．

作，垂足为点*F，*连结，则．



因为平面，所以平面，

为二面角的平面角．

因为，所以．

由已知得，故．

又，所以．

因为，

．

**[方法三]：三面角公式**

考虑三面角，记为，为，，

记二面角为．据题意，得．

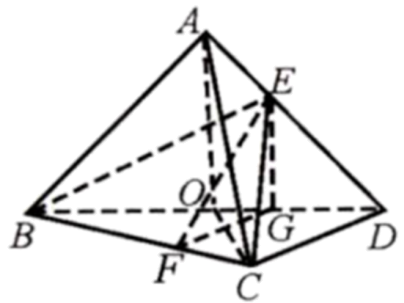
对使用三面角的余弦公式，可得，

化简可得．①

使用三面角的正弦公式，可得，化简可得．②

将①②两式平方后相加，可得，

由此得，从而可得．



如图可知，即有，

根据三角形相似知，点*G*为的三等分点，即可得，

结合的正切值，

可得从而可得三棱锥的体积为．

【整体点评】

(2)方法一：建立空间直角坐标系是解析几何中常用的方法，是此类题的通性通法，其好处在于将几何问题代数化，适合于复杂图形的处理；

方法二：找到二面角的平面角是立体几何的基本功，在找出二面角的同时可以对几何体的几何特征有更加深刻的认识，该法为本题的最优解.

方法三：三面角公式是一个优美的公式，在很多题目的解析中灵活使用三面角公式可以使得问题更加简单、直观、迅速.

21．（1）；（2）.

【解析】

【分析】

(1) 利用双曲线的定义可知轨迹是以点、为左、右焦点双曲线的右支，求出、的值，即可得出轨迹的方程；

(2)方法一：设出点的坐标和直线方程，联立直线方程与曲线*C*的方程，结合韦达定理求得直线的斜率，最后化简计算可得的值.

【详解】

(1) 因为，

所以，轨迹是以点、为左、右焦点的双曲线的右支，

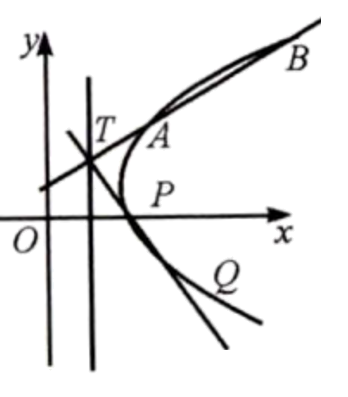
设轨迹的方程为，则，可得，，

所以，轨迹的方程为.

（2）**[方法一] 【最优解】：直线方程与双曲线方程联立**

如图所示，设,

设直线的方程为．



联立,

化简得.

则．

故．

则．

设的方程为，同理．

因为，所以，

化简得，

所以，即．

因为，所以．

**[方法二] ：参数方程法**

设．设直线的倾斜角为，

则其参数方程为，

联立直线方程与曲线*C*的方程，

可得，

整理得．

设，

由根与系数的关系得．

设直线的倾斜角为，，

同理可得

由，得．

因为，所以．

由题意分析知．所以，

故直线的斜率与直线的斜率之和为0．

**[方法三]：利用圆幂定理**

因为，由圆幂定理知*A，B，P，Q*四点共圆．

设,直线的方程为，

直线的方程为,

则二次曲线．

又由，得过*A，B，P，Q*四点的二次曲线系方程为：

，

整理可得：

，

其中．

由于*A，B，P，Q*四点共圆，则*xy*项的系数为0，即.

【整体点评】

(2)方法一：直线方程与二次曲线的方程联立，结合韦达定理处理圆锥曲线问题是最经典的方法，它体现了解析几何的特征，是该题的通性通法，也是最优解；

方法二：参数方程的使用充分利用了参数的几何意义，要求解题过程中对参数有深刻的理解，并能够灵活的应用到题目中.

方法三：圆幂定理的应用更多的提现了几何的思想，二次曲线系的应用使得计算更为简单.

22．（1）的递增区间为，递减区间为；（2）证明见解析.

【解析】

【分析】

(1) 首先确定函数的定义域，然后求得导函数的解析式，由导函数的符号即可确定原函数的单调性.

(2)方法二：将题中的等式进行恒等变换，令，命题转换为证明：，然后构造对称差函数，结合函数零点的特征和函数的单调性即可证得题中的结论.

【详解】

(1)的定义域为．

由得，，

当时，；当时；当时，．

故在区间内为增函数，在区间内为减函数，

(2)**[方法一]：等价转化**

由得，即．

由，得．

由（1）不妨设，则，从而，得，

①令，

则，

当时，，在区间内为减函数，，

从而，所以，

由（1）得即．①

令，则，

当时，，在区间内为增函数，，

从而，所以．

又由，可得，

所以．②

由①②得．

**[方法二]【最优解】：**变形为，所以．

令．则上式变为，

于是命题转换为证明：．

令，则有，不妨设．

由（1）知，先证．

要证：

．

令，

则，

在区间内单调递增，所以，即．

再证．

因为，所以．

令，

所以，故在区间内单调递增．

所以．故，即．

综合可知．

**[方法三]：比值代换**

证明同证法2．以下证明．

不妨设，则，

由得，，

要证，只需证，两边取对数得，

即，

即证．

记，则.

记，则，

所以，在区间内单调递减．，则，

所以在区间内单调递减．

由得，所以，

即．

**[方法四]：构造函数法**

由已知得，令，

不妨设，所以．

由（Ⅰ）知，，只需证．

证明同证法2．

再证明．令．

令，则．

所以，在区间内单调递增．

因为，所以，即

又因为，所以，

即．

因为，所以，即．

综上，有结论得证．

【整体点评】

(2)方法一：等价转化是处理导数问题的常见方法，其中利用的对称差函数，构造函数的思想，这些都是导数问题必备的知识和技能.

方法二：等价转化是常见的数学思想，构造对称差函数是最基本的极值点偏移问题的处理策略.

方法三：比值代换是一种将双变量问题化为单变量问题的有效途径，然后构造函数利用函数的单调性证明题中的不等式即可.

方法四：构造函数之后想办法出现关于的式子，这是本方法证明不等式的关键思想所在.